

連載

SPECTにおける
画質劣化とその補正V
画像再構成

法政大学工学部

尾川浩一

はじめに

SPECT 画像を再構成する画像再構成法の誤った使用によって、コントラスト分解能が低下することについて、『総論』において述べた。ここで述べる画像再構成法は、統計的推定理論を用いて画像再構成を行う最尤推定・期待値最大化 (ML-EM) 法や最大事後確率推定・期待値最大化 (MAP-EM) 法であるが、これらの方法は収束が遅いため、画像の高周波成分の回復が遅れ、反復計算回数が少ない場合には大きな濃度ひずみが発生し、コントラスト分解能も低下する。ここでは、これらの画像再構成法について簡単に述べ、画質の劣化との関係を見る。

統計的画像再構成法

統計的な枠組みで画像再構成を行う場合、任意の画像 I に対して計測値である投影データ Y が得られる条件付き確率 $P(Y|I)$ を最大にするように画像が推定されれば、そのような画像 \hat{I} は最も確からしい推定であると考えられる。これが最尤 (Maximum Likelihood : ML) 推定に基づく画像再構成法¹⁾である。この考え方を説明するために図 1 で話を進める。いま、0、90、180 度の 3 方向の投影データが観測されていたとする。このとき、どのような画像ならば、測定投影データに近い計算投影データが得られるかという観点で考える。まず、図 1a のような大きな円の内部が一様である分布 (画素値として平均値を設定した画像) を仮定し、これからスタートする。この投影データを計算してみると 90 度の角度の投影データは一致するが、0、180 度では一致しない。そこで、一様な円の左側に低画素値部を、右側に高画素値部を投影データの不一致度に応じて設定する。このような画像を新たに作り、計算投影データを得たのが図 1b である。この計算投影データを再び測定投影データと比較すると図 1a の時よりも測定投影データに対する一致度が高いが、完全には一致していないということがわかる。そこでさらに一部の画素値を変更しながら計算投影データと測定投影データの一致をみていく。そして、もし図 1c のように計算投影データが測定投影データに限りなく近ければ (これを尤度が高いという)、その計算投影データを作る元になった画像が本当の画像に違いないと判断するのである。このことを数式によって表現すると次のようになる (図 2)。放射性同位元素が崩壊する時間間隔は互いに独立で指数分布に従うため、単位時間あたりに計測される光子の個数はポアソン分布となる。投影データは複数の画素から発生した光子の和として観測されるが、個々の画素からの投影データはポアソン分布に従っているため、その和としての観測値 Y_i (測定投影データ) もポアソン分布に従うことになる。 Y_i について考えれば、この期待値はおのこの画素についての期待値 μ_j と画素 j から発生した光子が検出器 i で検出される確率 c_{ij} を用いて

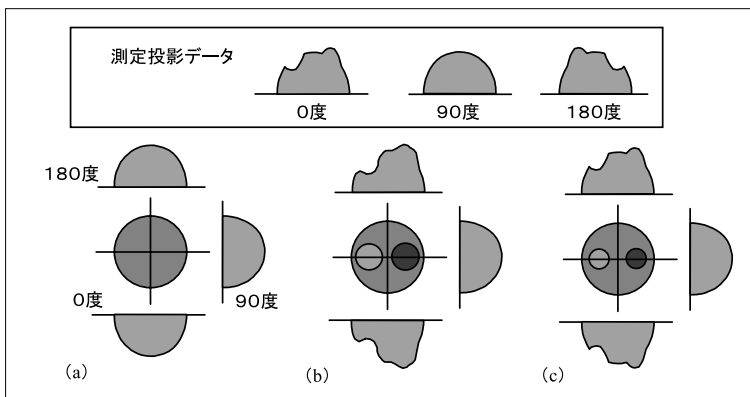


図1 確率的な画像再構成の考え方

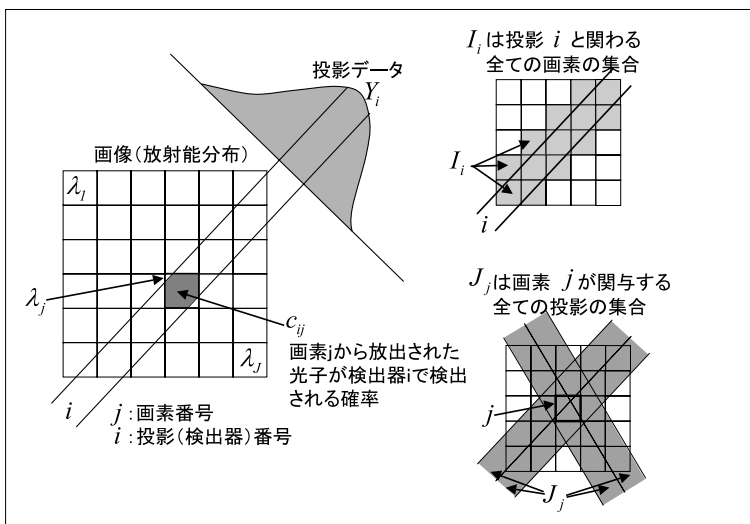


図2 記号の定義

$\sum_{j \in I_i} c_{ij} \lambda_j$ と表すことができる。ポアソン分布では観測値を k 、期待値を a としたとき、その確率分布は $e^{-a} \frac{a^k}{k!}$ と表されるので、 a の代わりに $\sum_{j \in I_i} c_{ij} \lambda_j$ を、 k の代わりに Y_i を代入すると i 番目の検出器についての $P(Y_i)$ は

$$P(Y_i | \lambda) = \frac{\exp\left(-\sum_{j \in I_i} c_{ij} \lambda_j\right) \cdot \left(\sum_{j \in I_i} c_{ij} \lambda_j\right)^{Y_i}}{Y_i!}$$

となる。ある i に関係するすべての i の投影データから λ_j の値が決まること、および Y_i の発生は独

立事象ということ を考慮すると、 $P(Y)$ は Y_i について乗算すればよいことがわかる。すなわち、

$$P(Y | \lambda) = \prod_i P(Y_i | \lambda) = \prod_i \frac{\exp\left(-\sum_{j \in I_i} c_{ij} \lambda_j\right) \cdot \left(\sum_{j \in I_i} c_{ij} \lambda_j\right)^{Y_i}}{Y_i!}$$

となる。ここで両辺の対数をとると乗算記号 \prod_i は加算記号 \sum_i にかわる。そして、 $P(Y)$ のについての最大化において、 λ_j と無関係な $Y_i!$ の項を無視すると、

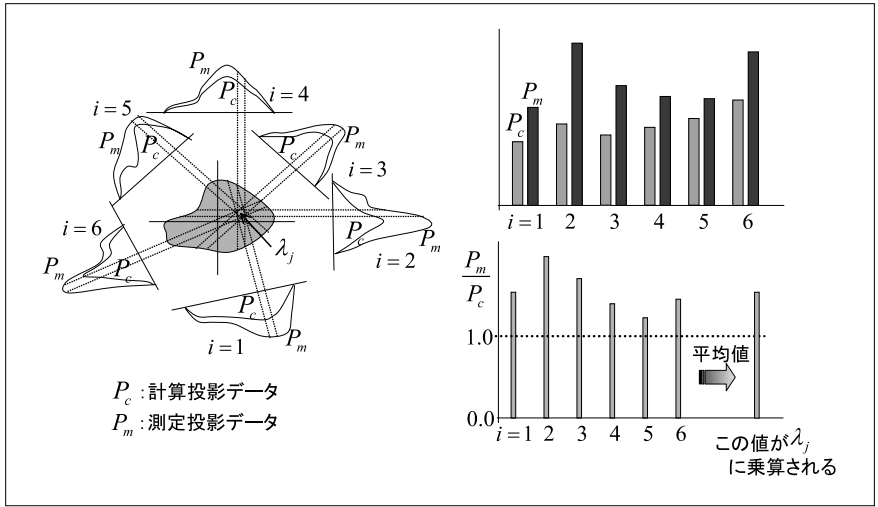


図3 画素値の変更

$$\begin{aligned} & \max_{\lambda} [\ln P(Y | \lambda)] \\ & = \max_{\lambda} \left[\sum_i \left\{ -\sum_{j \in I_i} c_{ij} \lambda_j + Y_i \ln \left(\sum_{j \in I_i} c_{ij} \lambda_j \right) \right\} \right] \end{aligned}$$

が得られる。ML 推定では 式を満たす画像 を求めることになる。ところが、Yは投影データについての観測値であり、画像を構成する個々の画素の期待値 とは直接結びつかないため、最大化操作は困難である。そこで、観測可能であるがその構成要素である画素ごとの期待値について未知であるYを、個々の画素ごとに定義された確率変数 X(こちらは観測できない)の和

$Y_i = \sum_{j \in I_i} X_{ij}$ として記述する。そして $P(Y)$ を $P(X)$ に置き換え、 $\ln P(X)$ を について最大化する。これが期待値最大化(Expectation Maximization : EM)アルゴリズム²⁾である。このEM アルゴリズムは期待値を求めるステップとそれを最大化するステップに分かれ、(n + 1)回目の新しい推定値 λ_j^{n+1} とn回目の推定値 λ_j^n の関係は次のように与えられる。

$$\lambda_j^{n+1} = \lambda_j^n \frac{1}{\sum_{i \in J_j} c_{ij}} \sum_{i \in J_j} c_{ij} \frac{Y_i}{\sum_{k \in I_i} c_{ik} \lambda_k^n}$$

このML-EM 画像再構成は、(a)ML 推定に収束する、(b)正值から始めると非負値制限が満足される、(c)画像濃度(全計数値)は一定値に保たれる、(d)計算量が多く、ML 推定解に近づくときに収束速度が遅くなる、(e)雑音によってチェッカーボード状の斑紋が現われる、などの特徴をもっている。

ML 推定では $P(Y)$ を について最大化したが、画像に対しての先験的な知識 $P(\lambda)$ が既知である(あるいは仮定できる)場合にはこれを考慮して、ベイズの定理

$$P(\lambda | Y) = \frac{P(Y | \lambda)P(\lambda)}{P(Y)}$$

から与えられる条件付き確率 $P(\lambda | Y)$ を について最大化することも考えられる。これを MAP (Maximum a posteriori)推定³⁾という。実際には $P(Y)$ に無関係な $P(\lambda)$ の項を除去した 式を最大化する。

$$\begin{aligned} & \max_{\lambda} [\ln P(\lambda | Y)] \\ & = \max_{\lambda} [\ln P(Y | \lambda) + \ln P(\lambda)] \end{aligned}$$

これを前述のEM アルゴリズムで解いたものが MAP-EM による画像再構成法である。ここで先験的な知識というのは何かということが問題にな

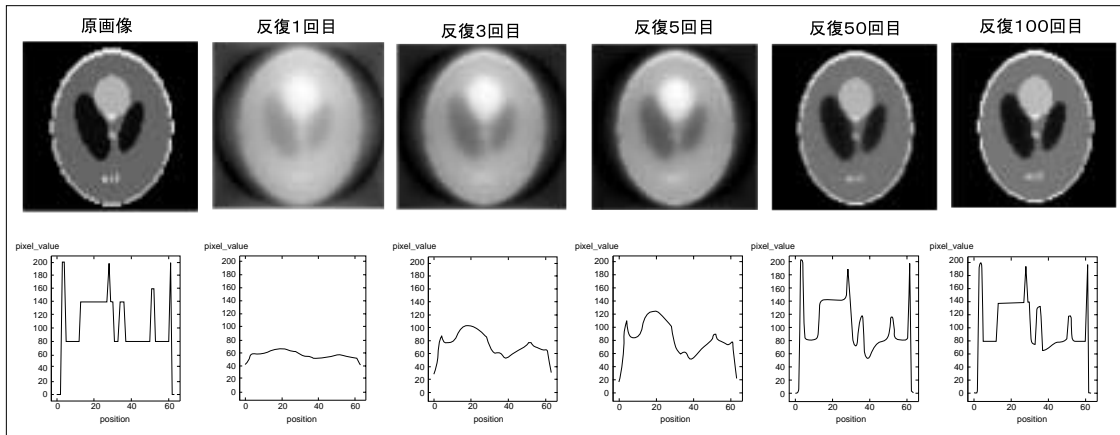


図4 逐次近似的画像再構成手法における画質の変化と中央縦(X = 32)での濃度プロファイル

るが、例えば濃度(放射能)の分布がなめらかに変化することを表す式を用いたり、解剖学的な構造を組み込む場合もある。

再構成のプロセスの特徴

これらの逐次近似的画像再構成法は基本的に計算量が多く、時間がかかるという問題がある。これは式の構造をみれば納得がいく。すなわち、式の右辺の最後の項の分母は*i*番目の計算投影データを意味しており Y_i との比を取っている。そして、この外側の \sum では、画素*j*に対してこの比をすべての方向の投影データで平均化していることがわかる。したがって、現在の画素値が次の回の補正画像の画素値に変化する際、この平均値が用いられる。よって画素値の更新の程度は小さく、画像の高周波成分に対応する部分の回復が遅れることが予想できる(図3)。また、尤度が高くなってきた段階では計算投影データの値が測定投影データの値に近づくのでこの比はほぼ1になり、その平均値を用いて次の画素値が決定されるので収束が次第に遅くなることも理解できる。雑音に関しては、上記のように投影データの比の平均値が用いられるため、比較的安定でありART (Algebraic Reconstruction Technique)⁴⁾のように特定の投影データの雑音に強い影響を受けないため再構成画像の画素値が振動したり、発散することは少ない。

図4はSheppファントム(64×64)を用いて統計的な画像再構成法の一般的特徴を観察したものである。ここで用いた方法はMAP-EM法であり、投影データは60方向(0~180度)とした。また、吸収、散乱、雑音は考慮していない。画像の先験的情報としては濃度変化の滑らかさを利用している。この図およびプロファイルからも理解できるように、このような逐次近似的な方法はその濃度値が変化の様子がゆっくりで、画像再構成の反復回数が少ない場合には画素値が戻っていないことがわかる。

収束速度の向上

ML-EMやMAP-EMなどの方法を加速するために開発されたのがOS(ordered subset)法である。この方法の登場により、従来のML-EMやMAP-EMなどの方法と比較して収束の速度が数十倍スピードアップし、これらの逐次的な方法が臨床でも使われるようになった。OSとは投影データをいくつかのグループ(サブセットという)に分け、そのグループ内の投影データの値のみを用いて画像データの値を変更して行くというものである。これらの加速法は、Hudson⁵⁾やByrne⁶⁾によって提案され、Ordered-Subsets(OS)アルゴリズムあるいはBlock-Iterative(BI)アルゴリズムと呼ばれる。原理的にはOSとは、ML-EMなどで行っている画素値変更の過程において、その画素

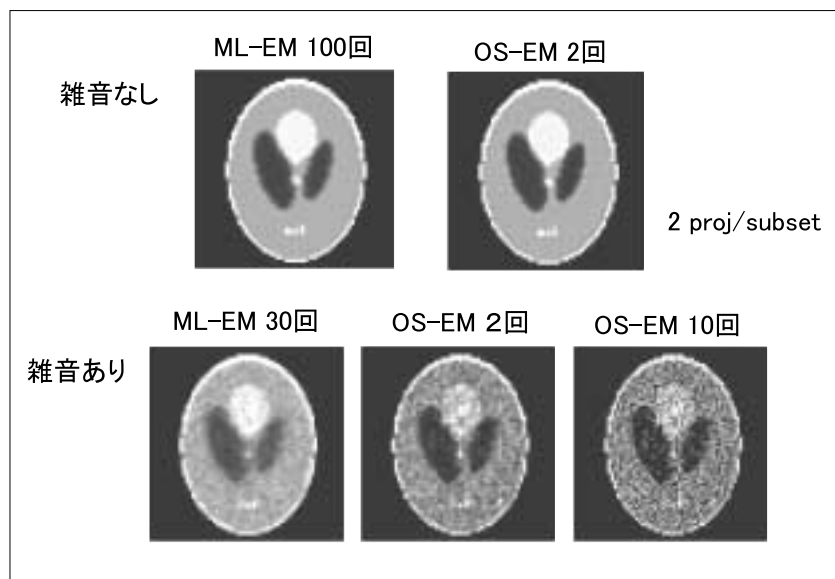


図5 ML-EM法とOS-EM法の比較

に関わるすべての投影データを参照するのではなく、サブセット内の投影データのみを参照し、画素値の変更を行っていくというものである。一方、ARTのような方法は参照する投影データが1つの場合にあたり、OS法はMLあるいはMAP法とARTの中間に位置する方法であるといえる。このOSアルゴリズムによって、高周波成分の回復が早まり、数回の計算で高画質の画像再構成が可能となった(図5)。またARTほど雑音に対しては敏感でないので手頃な繰り返し回数(時間)で高画質の画像を得ることができるようになった。サブセット内の投影データの数が少ない場合、雑音がない時には少ない反復回数で高画質の再構成画

像を得ることができるが、雑音がある場合には発散の傾向が高いので注意が必要である。雑音による発散を押さえる場合には、サブセット内の投影数を4~8程度にすればよいが、画素値の変更の際に同時に用いる投影データの数が増加することになるので画質の改善の速度は遅れることになる。

おわりに

反復的手法による画像再構成法を用いる際の注意事項をその式の構成から言及し、近年開発された高速化アルゴリズムについて紹介した。

<文献>

- 1) Shepp LA & Vardi Y : Maximum likelihood reconstruction for emission tomography. IEEE Trans Med Imag 1 : 112-121, 1982
- 2) Lange K & Carson R : EM reconstruction algorithm for emission and transmission tomography. J Comput Assist Tomogr 8 : 306-316, 1984
- 3) Levitan E & Herman GT : A maximum a posteriori probability expectation maximization algorithm for image reconstruction. Amer Statist Assoc 80 : 8-37, 1985
- 4) Gordon R : A tutorial on ART(Algebraic Reconstruction Technique). IEEE Trans Nucl Sci 21 : 78-93, 1974
- 5) Hudson HM & Larkin RS : Accelerated image reconstruction using ordered subsets of projection data. IEEE Trans Med Imag 13 : 601-609, 1994
- 6) Byrne CL : Block-iterative methods for image reconstruction from projections. IEEE Trans Imag Proc 5 : 792-794, 1996