

連載

SPECTにおける 画質劣化とその補正

VI γ 線の 統計変動

法政大学工学部
尾川浩一

はじめに

線の統計変動がSPECTの投影データに影響を与え、再構成画像を劣化させることについて、『総論』において述べた。ここでは、これらの統計変動とはどのようなものか、また、統計変動が再構成画像に与える影響について述べ、画質の劣化との関係を見る。

統計変動とは

放射性同位元素が崩壊する時間間隔は互いに独立で指数分布に従うため、単位時間あたりに計測される光子の個数はポアソン分布となる。簡単にいうと、単位時間あたりの計測光子数が常に同一

の数とならず、ある揺らぎを持った数として観測されるということである。ポアソン分布では観測値(カウント)を k 、期待値(何回かの計測をしたとき平均的に得られるカウント)を m としたとき、

観測値 k が得られる確率は $P(k) = e^{-m} \frac{m^k}{k!}$ として

表される。ポアソン分布の期待値 $E(k)$ は $E(k) = m$ となるが、これは、

$$\begin{aligned} E(k) &= \sum_{k=0}^{\infty} kP(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-m} \frac{m^k}{k!} = m e^{-m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= m e^{-m} \left(1 + \frac{m}{1!} + \frac{m^2}{2!} + \dots \right) = m e^{-m} e^m = m \end{aligned}$$

から与えられ、また分散 $V(k)$ については $V(k) = m$ となる。これについては、

$$\begin{aligned} E(k(k-1)) &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) e^{-m} \frac{m^k}{k!} \\ &= m^2 e^{-m} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{m^{k-2}}{(k-2)!} = m^2 e^{-m} e^m = m^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(k) &= E(k^2) - \{E(k)\}^2 \\ &= E(k(k-1)) + E(k) - \{E(k)\}^2 \\ &= m^2 + m - m^2 = m \end{aligned}$$

から求まる。

図1はポアソン分布のグラフであり、期待値が5, 10, 100の3つの場合を示している。これらの確率分布は(その形状をよくわかるようにするため)連続関数として描いてあるが、実際には離散的な関数となっている。すなわち、 $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ というように非負の整数値に対して値をとる関数である。図から期待値が5の場合は左右非対称であるが、期待値が大きくなった100の時には左右対称の正規分布とみなせることがわかる。生起する確率がもっとも大きいのは、その期待値となっている $k = 5, 10, 100$ の値である。また分散はこれらのピークの広がりであり、期待値が10程度以上あればほぼ正規分布とみなすことができる。例えば、測定カウントの平均値が m であれば分散も m に等しいので、その平方根の m は標準偏差ということになる。よって、(期待値) \pm の範囲に収まるカウント値は全体の68%程度出現し、(期待値) ± 2 におさまるカウント値は95%出現す

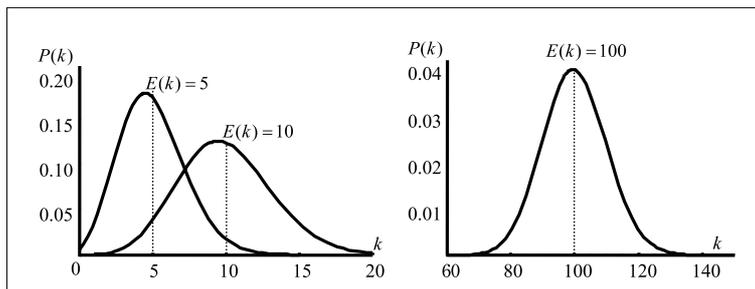


図1 ポアソン分布

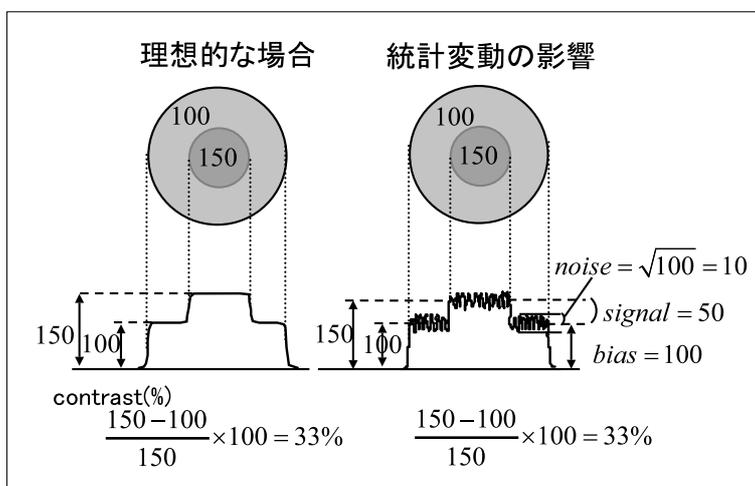


図2 プラナー画像に対する統計変動の影響

ることになる。ここで注意すべきことは、期待値が10カウントであっても非常に低い確率で18や3というカウントが計測されることがあることである。この点が一般の計測における測定誤差と違うところで、例えば真値10.0cmの長さの物体を1mmの目盛りのついた物差しで測るとき、読み値に変動があっても、ただか10.1cmや9.9cmになるはずである。ところが、放射線計測の場合では18cmや3cmという読み値が現れてしまうことに相当するのである。このように放射線計測では観測値に必然的に大きな誤差(雑音)が混入しており、放射線の計測において測定されたカウント値はひとつの目安にすぎなく、大きなばらつきがあることを熟知すべきである。核医学検査では臓器の機能情報を数値として解析することが可能であるが、測定された数値の持つ誤差についての認識

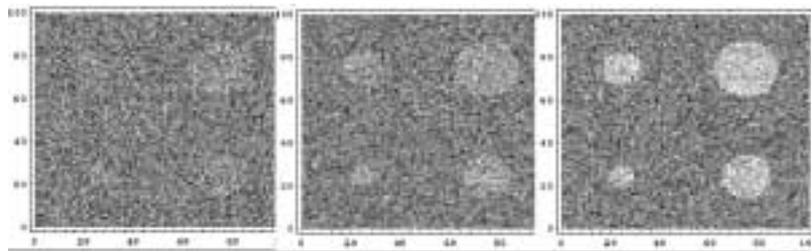
がないと正しい結論を導くことができない。ばらつきの程度に関しては次のようになる。期待値が100であった場合にはばらつきの目安は $m = \sqrt{100} = 10$ となり、雑音の割合は $10/100 = 0.1 = 10\%$ になる。これに対して、期待値が10000の場合には $m = \sqrt{10000} = 100$ となり、雑音の割合は $100/10000 = 0.01 = 1\%$ に減少する。核医学で画質を改善するためにはカウントを多くすることだという所以がここにある¹⁾。すなわち、カウントを積み重ねれば積むほど、ばらつき(雑音)の成分が相対的に小さくなり信号成分のみが見えてくるのである。ポアソン分布と正規分布の相異点は、ポアソン分布は離散値(非負の整数値)に対する分布、分散は期待値に等しいのに対し、正規分布は連続量、負値の変数値も取り得る、分散は自由に変えられることなどである。

背景部の統計変動に対する信号の割合 $S/N = \frac{\text{signal}}{\text{noise}} = \frac{\text{signal}}{\sqrt{\text{bias}}}$

S/N=0.5
(signal=5)

S/N=1.0
(signal=10)

S/N=2.0
(signal=20)



bias=100

図3 対象物の認識能と統計変動

統計変動と画質

コールドスポットやホットスポットの部分を画像から読みとるとき、基本的には対象部位の平均濃度(期待値)が背景部のそれと比べてどうかということで認識が行われる。これは、人が新聞の写真を見るとき、その大きさの異なった網点の1つ1つを見ているのではなく、網点の集合(一定面積あたりの黒の量)を見て、そこから濃度レベルが決められていることを思い出すとわかりやすい。このため、統計変動を含んだ画像があっても、無意識のうちに人間の目による低域通過フィルタ、すなわち濃度のスムージングが施され対象物のコントラストなどが判断される。しかし、その変動があまりにも大きい場合(低カウントの画像)には、もはや目によるスムージングが働かなくなり、白と黒の点がでたらめに混ざった画像として見え、平均的な濃度値としての知覚が行われない。このため、これらの画像に強い平滑化処理を行うか、カットオフ周波数(遮断周波数)の低いButterworthフィルタなどをかけて、統計変動の除去が行われる。

前述のようにポアソン分布は正規分布と同様に期待値を中心に値がばらつくので、原理的には(期待値のみについて考えれば)濃度コントラストの認識に影響を与えない(図2のプラナー画像参照)。しかし、信号の大きさ(濃度コントラスト)

が雑音成分の大きさに近づくと、信号成分であるコールドスポットやホットスポットの部分を認識できなくなる。図3は信号成分のコントラストが統計変動成分によってどのように影響を受けるかを見たものである。人がコールドスポットやホットスポット部分を見るときには、コントラストの相違、対象部位の大きさ、辺縁の形状、雑音などによって認識性能が変わる。この図は4種類の大きさの円形物体を一樣の濃度の背景部に埋め込み、それらの期待値を中心に正規分布で雑音を生じさせたものである。図で定義しているS/Nは信号成分と雑音成分の比であり、信号成分が雑音成分の2倍以上あれば認識は対象物の大きさにかかわらず容易である。

SPECT画像と統計変動

プラナー画像とSPECT画像では統計変動の影響の考え方がやや異なる。前述したように、プラナー画像のある画素で、単位時間に100カウントが計測されたとすると、われわれはこれを期待値とみなしてその標準偏差 $\sqrt{100}$ をばらつき(誤差)の目安としている。この場合、10カウントが誤差なのでその画素値に関してS/Nは $100/10 = 10$ 、雑音レベルは $\frac{10}{100} \times 100(\%) = 10\%$ ということになる。

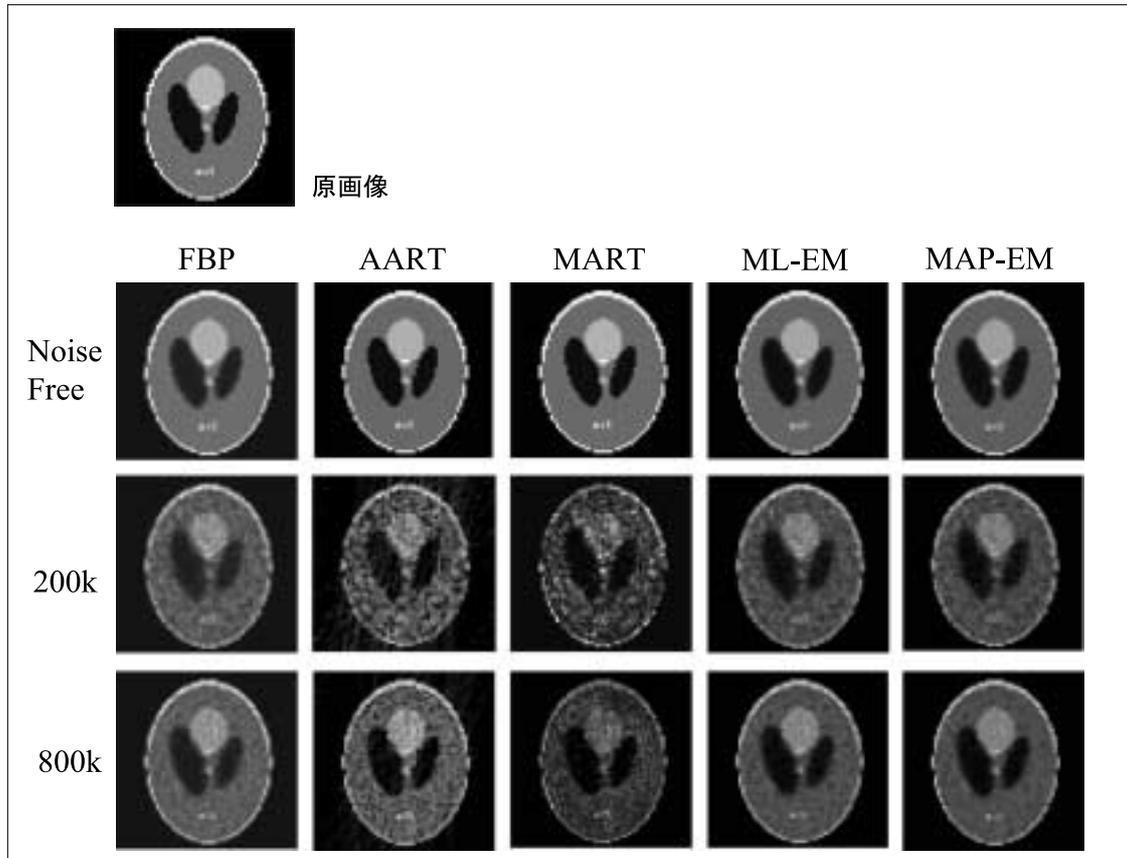


図4 画像再構成法と統計変動

一方、SPECT 画像は複数の方向からの投影データ、すなわち画素値の積分値から再構成される。ここで、あるポアソン分布に従う確率変数の和は、やはりポアソン分布になるので、投影データそのものの値もまたポアソン分布に従った計数となっている。フィルタつき逆投影法などの場合、計測された投影データに対して、微分型のフィルタ (ramp や Shepp & Logan) がコンボリューションされ、統計変動成分が強調されることになる。この場合、計測カウンターの総数、サンプル間隔、フィルタの種類などによって再構成画像の S/N が変化する。1 例として、 $D \times D$ の領域内に均一に分布した放射能の再構成画像の S/N は

$$S/N = \sqrt{\frac{12M}{\pi^2(D/d)^3}}$$

で与えられる²⁾。ここで M は総カウント数、d は

サンプリング間隔 (ピクセル幅) である。M が増大あるいは d が大きくなれば S/N が大きくなるのがわかるが、M を大きくするためには長い測定 (検査) 時間が必要となり患者の苦痛が大きくなる。一方、d が大きくなることは画素サイズが大きくなるので空間分解能が落ちることになり、統計変動の改善と高い空間分解能は相反する要求になっていることがわかる。1 例として、厚さ 1cm で大きさが 20×20 cm の平板状の容器内に放射能が封入されているとし、画像の統計変動成分をプレーナ画像と SPECT 画像で比べてみる。ここで、全収集カウントを 100 万カウントとし、画素の大きさを 1×1 cm とする。プレーナ画像の場合は画素数が $20 \times 20 = 400$ なので、画素あたりのカウントは $10^6/400 = 2500$ となる。よって、雑音成分は $\sqrt{2500} = 50$ となり、相対的な雑音の大きさは $50/2500 = 0.02 (= 2\%)$ となる。一方、

SPECT 画像の場合は

$S/N = \frac{12 \times 10^6}{2(20/1)^3} = 12.3$ となり、相対的な雑音の大きさは

$\frac{1}{S/N} \times 100(\%) = 8.1\%$ となる。このようにプ

ラナー画像とSPECT画像では統計変動の影響の仕方が異なることに注意しなければならない。

再構成画像の画質と統計変動

統計変動を含んだ投影データから画像を再構成すると画質の劣化が起きる。図4には原画像(Shepp phantom)と再構成を行った画像を、雑音のない場合、200k カウントの場合、800k カウントの場合に分けて示している。原画像のサイズは64 × 64 画素、投影データは0 から180 度までを60 投影としてシミュレーションを行っている。ここでは線の吸収や散乱は考慮していない。比較の対象となる方法はフィルタつき逆投影法(Filtered backprojection : FBP)、加法的ART(Additive algebraic reconstruction technique : AART)、乗法的ART(Multiplicative algebraic reconstruction technique : MART)、最尤推定 - 期待値最大化(ML-EM)法、最大事後確率推定 - 期待値最大化(MAP-EM)法となっている。FBP以外の方法の反復計算回数は100回となっている。雑音のない場合ではAARTやMARTなどの逐次近似法^{3, 4)}は非常にきれいな再構成画像となっているが、雑音が混入すると劣化が著しい。これに対してML-EMやMAP-EMな

どの方法は、画像再構成のモデルの作成において投影データがポアソン分布に従うことを加味している^{5, 6)}ので、雑音がある場合でも比較的良質な画像となっている。また、MAP-EMの場合は、画像の滑らかさを考慮しているため、統計変動の影響がさらに少なくなっている。これに対してFBPなどのような解析的な再構成法は雑音が多い場合でも比較的安定な画像を再構成している。一般に、統計変動成分が再構成画像に与える影響は、白や黒のブロック状のまだらな領域の発生であり、統計変動の影響を抑えるには投影データや再構成された画像に対してのスムージング処理が効果的である。ML-EMなどの方法による再構成では、尤度関数の値は反復に伴って上昇するが、オリジナルとなる測定投影データにはすでに雑音が混入しており、この投影データに近づくように画素値の変更がなされるため、尤度が高い画像が(われわれが見たところ)必ずしも見やすい、きれいな画像とはならないことに注意が必要である。

まとめ

統計変動の発生および、その影響をプラーナー画像とSPECT画像から述べた。また、さまざまな再構成法に対してこの統計変動が与える影響を述べた。SPECTでは収集可能なカウントが限られ、またポアソン分布に従う計数となっているので、この問題は避けては通れない問題となっているが、統計変動についての十分な理解はSPECT再構成画像の画素値を他の解析に用いる際の精度評価において、とても重要なものとなっている。

<文献>

- 1) Physics in Nuclear Medicine(edited by Sorenson JA & Phelps ME), 2nd ed., W.B. Saunders Company, Philadelphia, 1987
- 2) Hoffman EJ & Phelps ME : Positron emission tomography: principles and quantitation. Positron Emission Tomography and Autoradiography: Principles and Applications for the Brain and Heart(edited by Phelps ME et al), Raven Press, New York, 1986, p.237-286
- 3) Gordon R et al : Algebraic reconstruction technique(ART) for three dimensional electron

microscopy and X-ray tomography. J Theoret Biol 29 : 470-481, 1971

- 4) Gordon R : A tutorial on ART(Algebraic Reconstruction Technique). IEEE Trans Nucl Sci 21 : 78-93, 1974
- 5) Shepp LA & Vardi Y : Maximum likelihood reconstruction for emission tomography. IEEE Trans Med Imag 1(2) : 113-122, 1982
- 6) Lange K & Carson R : EM reconstruction algorithm for emission and transmission tomography. J Compt Assist Tomogr 8(2) : 306-316, 1984